Esercizi sulle Derivate*

prof. Enrico Centenaro
email: <enrico@centenaro.net>
web: `www.centenaro.net`

A.S. 2009/2010

Sommario

Questo documento contiene degli esercizi su argomenti relativi al calcolo differenziale (problemi di massimo, studio di funzione, applicazione dei classici teoremi sulle derivate).

È stato pensato per un utilizzo autonomo nell'ambito della preparazione della seconda prova dell'esame di stato di uno studente liceale.

È ovvio, ma è meglio ribadirlo, che gli esercizi che non sono risolti sono assolutamente da fare!

Questo documento è stato prodotto utilizzando LaTeX[1] un magnifico ambiente per la redazione di documenti scientifici e non.

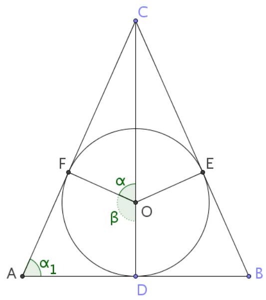
Suggerimenti, critiche... saluti, sono i benvenuti, in bocca al lupo.

Dedicato a Massimo

[1]cfr `http://latexproject.org` e `http://linuxitalia.org`

Esercizio 1 *Data la circonferenza di raggio R, fra tutti i triangoli isosceli ABC circoscritti, di vertice C, determinare quello che:*

1. *ha area massima*
2. *e la base più l'altezza massimi.*



Preliminari

Scegliamo l'algolo $\alpha \in (0, \pi/2)$ come il parametro del problema, allora $\beta = \pi - \alpha$ perché $\widehat{F} = \widehat{D} = \pi/2$, quindi $\widehat{FOC} = \alpha$ come mostrato in figura. Dato che il triangolo FOC è rettangolo in F si ricava $FO = OC \cos\alpha$ e quindi $OC = FO/\cos\alpha$ quindi

$$OC = R/\cos\alpha \tag{1}$$

Inoltre $DC = DO + OC = R + R/\cos\alpha = R + R/\cos\alpha$ quindi:

$$DC = R(\cos\alpha + 1)/\cos\alpha \tag{2}$$

Inoltre, dato che $AB = 2AD$, si ottiene la prima funzione da massimizzare, l'area $Area = AB\ DC/2$ quindi:

$$f(\alpha) = Area = R^2 \frac{(cos\alpha + 1)^2}{\cos\alpha \sin\alpha}$$

Inoltre la seconda funzione da considerare è la somma fra la base e l'altezza, $Base + Altezza = AB + DC$ quindi:

$$g(\alpha) = Base + Altezza = R\frac{(\cos\alpha + 1)(2\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

Ricerca estremi

Per determinare eventuali massimi e minimi si devono calcolare le derivate prime di $f(\alpha)$ e $g(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = R^2 \frac{1 - 2\cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \sin^2\alpha}$$

$$g'(\alpha) = R\frac{\sin^3\alpha + 2\sin^2\alpha(\cos\alpha + 1) - 2\cos\alpha - 2}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$$

Risolviamo la disequazione $f'(\alpha) \geq 0$, che, tenendo conto dei fattori positivi, si semplifica in:

$$2\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha - 1 \leq 0$$

che diventa

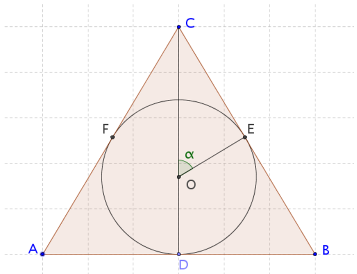
$$(\cos\alpha + 1)^2(\cos\alpha - 1) \geq 0$$

Le soluzioni sono $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$ (tenendo conto del dominio), perciò la funzione decresce fino a $\pi/3$ e poi cresce successivamente: $\alpha = \pi/3$ è un minimo.

⋇

Esercizio 2 *La ricerca degli estremi di $g(\alpha)$ è lasciata allo studente volenteroso.*

Esercizio 3 *Fra tutti i coni circolari retti circoscritti a una sfera di raggio R verificare che quello di minima area laterale ha il suo vertice che dista $R\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.*



Preliminari

Il grafico rappresenta la sezione dell'oggetto con un piano passante per l'asse del cono. Consideriamo la lunghezza $x = CO$, $x \in (R, +\infty)$ come il parametro del problema. $S_{lat} = \frac{1}{2}$ *perimetro di base apotema* $= \frac{1}{2}\ 2\pi\ AD\ AC = \pi\ AD\ AC$. È immediato vedere che i triangoli ADC e OFC sono simili, inoltre $FC = \sqrt{x^2 - r^2}$. Perciò $CD : AC = FC : OC$ da cui $AC = (x + R)\frac{x}{\sqrt{x^2-r^2}}$,

$$AC = x\sqrt{\frac{x + R}{x - R}}$$

e ancora, $AD : FO = DC : FC$, da cui $AD = R\frac{(R+x)}{\sqrt{x^2-R^2}}$,

$$AD = R\sqrt{\frac{x + R}{x - R}}$$

La funzione da studiare è $f(x) = S_{lat}$:

$$f(x) = \pi R x \frac{x+R}{x-R}$$

con la restrizione che $x > R$ (per evidenti considerazioni geometriche).

Ricerca estremi

La derivata della funzione $f(x)$ è

$$f'(x) = \pi R \frac{x^2 - 2Rx - R^2}{(x-R)^2}$$

Tenendo conto delle restrizioni geometriche e dei fattori che sono positivi, gli estremi si calcolano risolvendo la disequazione:

$$x^2 - 2Rx - R^2 \geq 0$$

Che ha soluzioni per $x \leq R(1-\sqrt{2}) \vee x \geq R(1+\sqrt{2})$, siccome $x > R$, la derivata è positiva per $x \geq R(1+\sqrt{2}$ e negativa per $R < x < R(1+\sqrt{2})$. Quindi $x = R(1+\sqrt{2})$ è un minimo.

La distanza dalla superficie della sfera è $x - R$ che è $\sqrt{2}R$.

Esercizio 4 *Data una sfera di raggio R, determinare:*

1. *il cono di volume minimo circoscritto alla sfera,*

2. *il cono di volume massimo inscritto alla sfera.*

Soluzione del punto 1

Per il disegno e la scelta del parametro si veda l'esercizio 3.

$Volume\ Cono = \frac{1}{3} Area\, di\, base\ altezza$, $CO = x$, $AD = R\sqrt{\frac{x+R}{x-R}}$, $CD = x + R$. La funzione volume è dunque

$$f(x) = \frac{\pi R}{3} \frac{(x+R)^2}{(x-R)} \quad con\ x > r$$

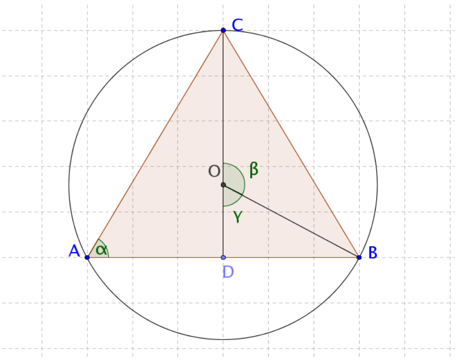
la cui derivata è

$$f'(x) = \frac{\pi R}{3} \frac{(x+R)(x-3R)}{(x-R)^2} \quad con\ x > r$$

La disuguaglianza $f'(x) \geq 0$ si risolve facilmente colla regola dei segni tenendo conto che il fattore $(x-R)^2 > 0$, così pure $\frac{\pi R}{3} > 0$.

Dunque $x = 3R$ è un minimo, e il cono di volume massimo è alto $4R$ e ha raggio di base $\sqrt{2}R$.

Soluzione del punto 2



Dato che α e β insistono sullo stesso arco e α è alla circonferenza, mentre β è al centro si deduce subito che $\beta = 2\alpha$ e $\gamma = \pi - \beta$. Quindi $OB = R$, $DB = OB \sin(\pi - 2\alpha) = R \sin 2\alpha$, $OD = DB \cos(\pi - 2\alpha) = -R \cos 2\alpha$, $CD = R - R \cos 2\alpha = R(1 - \cos 2\alpha)$. Il volume è dunque:

$$Volume = \frac{\pi}{3} R^3 \sin^2 2\alpha (1 - \cos 2\alpha)$$

Prendendo come parametro $x = CD$ con $0 < x < 2R$ in modo simile all'esercizio 3, si ottiene $DB = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{x(2R - x)}$, allora

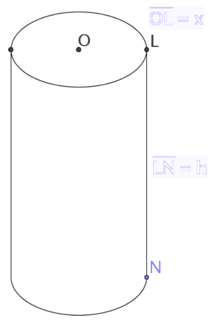
$$V(x) = \frac{\pi}{3} x^2 (2R - x)$$

La derivata prima è

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} (4Rx - 3x^2)$$

Risolvendo la disuguaglianza e tenendo conto delle restrizioni su x si deduce che $x = 4R/3$ è un massimo. Il cono cercato ha perciò altezza $4R/3$ e raggio di base $2\sqrt{2}R/3$.

Esercizio 5 *Fra tutti i cilindri di volume assegnato $V = 25\pi$, determinare quello di superficie totale minima. Determinare poi la superficie e il volume della sfera a esso circoscritta.*



Preliminari

Scegliamo come variabile x del problema il raggio del cerchio di base. Allora $V = \pi x^2 h$, uguagliando al valore assegnato $25\pi = \pi x^2 h$ otteniamo $h = 25/x^2$. La funzione che rappresenta la superficie laterale diventa:

$$S_{lat}(x) = 2\pi x h = \frac{50\pi}{x}$$

La superficie totale allora è la somma fra quella laterale e il doppio dell'area di base, la funzione da minimizzare perciò diventa:

$$S(x) = \frac{50\pi}{x} + 2\pi x^2$$

Con la ovvia restrizione che $x > 0$.

Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata della funzione $S(x)$ e ne studiamo il segno.

$$S'(x) = -\frac{50\pi}{x^2} + 4\pi x = \frac{2x^3 - 25}{x^2}$$

Dato che $x > 0$ la disuguaglianza $S'(x) \geq 0$ equivale a:

$$2x^3 - 25 \geq 0$$

Che ha soluzione (l'esponente di x è dispari) $x \geq \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$, perciò $x = \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$ è un minimo.

L'altezza del cilindro si trova utilizzando la formula $h = 25/x^2$, semplificando si ottiene $h = 5\sqrt[3]{4/5}$ e il volume diventa $V = \pi(\sqrt[3]{25/2})^2 5\sqrt[3]{4/5} = 25\pi$, ovviamente.

Per calcolare il raggio della circonferenza circoscritta basta notare che se noi sezioniamo con un piano passante per l'asse del cilindro otteniamo un rettangolo di dimensioni $2x$ e h, la diagonale del rettangolo è il diametro della sfera. Perciò basta applicare il teorema Pitagora:

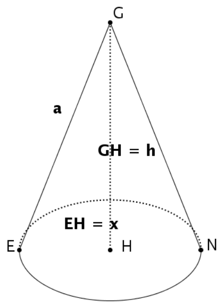
$$R = \sqrt{x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \cdots = \sqrt[9]{2 \cdot 5^4}$$

Con questo raggio calcoliamo il volume e la superficie cercati:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \cdots = \frac{40}{3}\pi\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

$$S = 4\pi R^2 = \cdots = 4\pi\sqrt[9]{2^2 \cdot 5^8}$$

Esercizio 6 *Fra tutti i coni di apotema fissato, determinare quello di volume massimo.*



Preliminari

Per calcolare il volume dobbiamo determinare l'altezza che, siccome il triangolo GHN è rettangolo, si ricava subito col teorema di Pitagora: $h = \sqrt{R^2 + a^2}$. Il volume è perciò $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{R^2 + a^2}$. Scegliamo come parametro del problema $x = R$, le limitazioni si deducono dalla rappresentazione grafica e sono $0 < x < a$. La funzione da studiare è:

$$V(x) = \frac{\pi x^2}{3}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 < x < a)$$

Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata della funzione $V(x)$ e valutiamo dove è positiva, tenendo conto delle restrizioni su x.

$$\begin{aligned}
V'(x) &= \frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\frac{4x(a^2 - x^2) - 2x^3}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right) \\
&= \frac{\pi x}{3\sqrt{a^2 - x^2}}\left(2(a^2 - x^2) - x^2\right) \\
&= \frac{\pi x(2a^2 - 3x^2)}{3\sqrt{a^2 - x^2}}
\end{aligned}$$

Dato che $0 < x < a$ la disequazione $V'(x) \geq 0$ equivale a

$$2a^2 - 3x^2 \geq 0$$

Le cui soluzioni nell'intervallo $(0, a)$ sono $(0, a\sqrt{2/3})$ (dato che $a\sqrt{2/3} < a$); perciò nel punto $x = a\sqrt{2/3}$ c'è un massimo.

Per vedere se è un massimo assoluto calcoliamo il valore della funzione $V(x)$ negli estremi dell'intervallo $(0, a)$. $V(0) = V(a) = 0$ dunque $V(a\sqrt{2/3}) = \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi a^3$ è il valore massimo assunto.

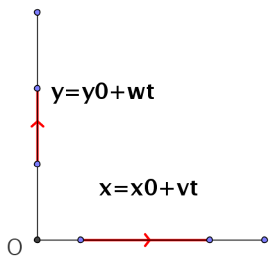
⁜

Esercizio 7 *Fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto verificare che quello che ha il volume massimo ha l'altezza pari a un terzo dell'altezza del cono. [Sugg. prendere come parametro x l'altezza del cilindro.]*

⁜

Esercizio 8 *Dato un cilindro equilatero (altezza e diametro di base uguali), determinare il cono di volume minimo con base complanare al cilindro, circoscritto al cilindro. Sia a il raggio di base. [Sugg. se x è l'altezza del cono allora $x = 6a$, cioè il triplo dell'altezza del cilindro.]*

Esercizio 9 *Due navi si muovono su traiettorie rettilinee perpendicolari fra loro con velocità fisse e costanti. Trovare la distanza minima. Supporre $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$.*



Preliminari

Le leggi del moto forniscono le coordinate della posizione delle navi al variare del tempo. La distanza fra le due navi si ottiene con il teorema di Pitagora:

$$d(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(y_o + wt)^2 + (x_o + vt)^2}$$

con la restrizione che $t > 0$.

Ricerca estremi

Come al solito calcoliamo la derivata e ne studiamo il segno.

$$\begin{aligned} d'(t) &= \frac{2(y_0 + wt) + 2(x_0 + vt)}{\sqrt{(y_o + wt)^2 + (x_o + vt)^2}} \\ &= \frac{y_0 + x_0 + (v + w)t}{\sqrt{(y_o + wt)^2 + (x_o + vt)^2}} \end{aligned} \tag{3}$$

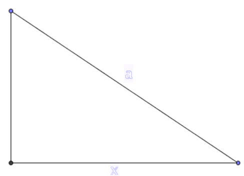
Risolviamo la disuguaglianza che si ottiene ponendo la derivata (3) positiva:

$$\begin{aligned} y_0 + x_0 + (v+w)t &\geq 0 \\ t(v+w) &\geq -(x_0+y_0) \end{aligned}$$

1. Se $v + w = 0$ allora, dato che $x_0 + y_0 > 0$ la funzione è strettamente crescente e si ha un minimo per $t = 0$;
2. se $v + w > 0$ allora per $t = -\frac{x_0+y_0}{v+w}$ si ha un minimo;
3. mentre se $v + w < 0$ per $t = -\frac{x_0+y_0}{v+w}$ si ha un massimo, quindi un minimo lo si ha per $t = 0$.

Sostituendo $t = -\frac{x_0+x_0}{v+w}$ nella espressione della distanza si ottiene $d = \sqrt{2}\left|\frac{y_0 v - x_0 w}{v+w}\right|$.

Esercizio 10 *Fra tutti i triangoli aventi la stessa ipotenusa quello isoscele ha l'area massima.*



Preliminari

L'altezza del triangolo si ottiene utilizzando il teorema di Pitagora: $\sqrt{a^2 - x^2}$, le restrizioni sulla base sono evidentemente $0 < x < a$.

La funzione da studiare è allora:

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} \quad 0 < x < a$$

Ricerca estremi

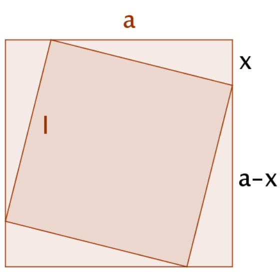
$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2-2x^2}}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

Tenendo conto delle restrizioni di x la (4) è positiva se

$$a^2 - 2x^2 \geq 0$$

La soluzione nell'intervallo $(0, a)$ è $0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$ perciò $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ è un minimo e per tale valore $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ quindi $x = h$ e il triangolo è isoscele.

Esercizio 11 *Fra tutti i quadrati inscritti in un quadrato assegnato, trovare quello di area minima.*



Preliminari

Il triangolo che ha lati $l, a - x, x$ è un triangolo rettangolo, perciò $l = \sqrt{x^2 - (a - x)^2}$ con $0 < x < a$. La funzione da studiare è l'area del quadrato di lato l, cioè:

$$A(x) = l^2 + (a - x)^2$$

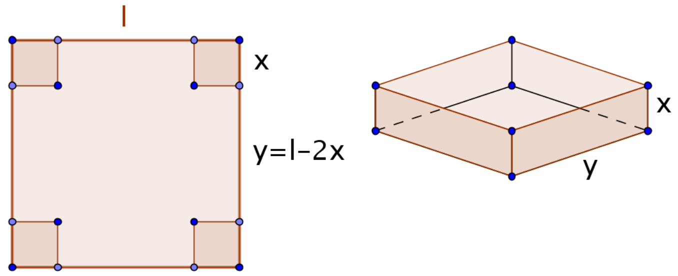
Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata e ne studiamo il segno:

$$\begin{aligned} A'(x) = 2x + 2(a - x)(-1) &\geq 0 \\ 4x &\geq 2a \\ x &\geq a/2 \end{aligned}$$

Tenendo conto della restrizione su x $(0 < x < a)$, la soluzione è $a/2 < x < a$, perciò $a/2$ è un minimo. Perciò il quadrato cercato è il rombo che ha vertici nei punti medi del quadrato esterno e ha lato $a\sqrt{2}/2$ e area $a^2/2$.

Esercizio 12 *Ai quattro angoli di un foglio metallico quadrato vengono ritagliati quattro quadrati, poi si piegano i lembi in modo da da realizzare una scatola aperta. Quale dimensione devono avere questi quadrati affinché l'area della scatola sia massima?*



Preliminari

Evidentemente $2x + y = l$ quindi $y = l - 2x$ con la restrizione $0 < x < l/2$ che deriva dal fatto che $x > 0$ e che $l - 2x > 0$. La funzione da studiare è allora:

$$\begin{aligned} V(x) &= y^2 x \\ &= (l-2x)^2 x \end{aligned}$$

Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata e studiamo il segno:

$$\begin{aligned} V'(x) = (l-2x)^2 + x2(l-2x)(-2) &\geq 0 \\ (l-2x)(l-2x-4x) &\geq 0 \;\; \textit{dato che } (l-2x) > 0 \\ l - 6x &\geq 0 \\ x &\leq l/6 \end{aligned}$$

Perciò $x = l/6$ è un massimo, in corrispondenza del quale $y = 2l/3$ e il volume è $V = 2l^3/27$.

Esercizio 13 *Data la famiglia di funzioni $f_a(x) = x^3 - 3ax^2 + a^2$ con $a > 0$ si determini quella che nel punto di minimo locale assume il valore massimo.*

Soluzione

Il minimo della funzione f_a si ottiene studiando il segno della sua derivata:

$$f_a'(x) = 3x^2 - 6ax \tag{5}$$

Studiando il segno della (5) si ottiene che c'è un minimo locale in $x = 2a$ il cui valore è $f_a(2a) = -4a^3 + a^2$. Affinché questo valore sia massimo a deve essere uno zero della derivata di $f_a(2a)$ rispetto al parametro a.

$$\begin{aligned} \frac{d\, f_a(2a)}{da} = -12a^2 + 2a &\geq 0 \\ 2a(1-6a) &\geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Utilizzando la regola dei segni nella (6) si ottiene che per $a = 1/6$ si ha un massimo che vale $-4(1/6)2 + (1/6)^2$.

Esercizio 14 *Tra le cubiche di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ determinare quella che ha un minimo locale in $x = -1$ che vale 0 e un massimo locale in $x = 1$ che vale 8.*

Soluzione

I massimi e i minimi sono estremi perciò annullano la derivata, inoltre questi punti appartengono alla curva cioè verificano la sua equazione. Calcoliamo la derivata $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ e scriviamo il sistema che traduce le richieste:

$$\begin{cases} 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 & -1 \text{ è minimo} \\ a(-1)^3 + b(-1^2) + c(-1) + d = 0 & \text{passa per } (-1, 0) \\ 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0 & 1 \text{ è massimo} \\ a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 8 & \text{passa per } (1, 8) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $a = -2$, $b = 0$, $c = 6$ e $d = 4$.

Esercizio 15 *Una aeromobile percorre n chilometri alla velocità w (in chilometri orari); sia c il costo di un quintale di combustibile e q la spesa oraria per il personale di volo. Ammettendo che il consumo C del carburante in quintali per chilometro sua proporzionale al quadrato della velocità w, determinare il valore della velocità che corrisponde alla spesa minima per personale e per il combustibile.*

Soluzione

Il costo totale è la somma fra il costo del personale e il costo del carburante, inoltre la supposizione sul consumo C si traduce nella formula $C = kw^2$ con k la costante di proporzionalità. Allora il costo del carburante per n chilometri è:

$$C_{carb} = n\, kw^2\, c$$

mentre il costo del personale si ottiene moltiplicando il tempo di percorrenza del volo n/w per il costo orario del personale q:

$$C_{pers} = q\frac{n}{w}$$

La funzione da studiare è perciò:

$$C_{tot} = f(w) = nkw^2c + q\frac{n}{w} \tag{7}$$

Per determinare gli estremi (7) si deve studiare il segno della derivata prima.

$$
\begin{aligned}
f'(w) = 2nkcw - \frac{qn}{w^2} &\geq 0 \\
\frac{2nckw^3 - qn}{w^2} &\geq 0 \\
w^3 &\geq \frac{q}{2ck} \ (\textit{essendo elevato alla terza}) \\
w &\geq \sqrt[3]{\frac{q}{2ck}} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Dunque in corrispondenza della velocità $w = \sqrt[3]{\frac{q}{2ck}}$ si ha un minimo del costo totale.

Esercizio 16 *Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti delle seguenti funzioni:*

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$ *in* $[-5/2, 2]$;
2. $f(x) = x^3 - 3x$ *in* $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$;
3. $f(x) = \sqrt{x - 4x^2}$ *in* $[0, 4]$;
4. $f(x) = |\sin x|$ *in* $[-3\pi/4, 2\pi/3]$.

Soluzione del punto 1

Dato che $f(x)$ è continua nell'intervallo di definizione (in realtà su tutto $\mathbb{R}$), per il teorema di Weirestrass ammette massimi e minimi assoluti. Cerchiamo i relativi analizzando la sua derivata:

$$
f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+2)^2}}
$$

che ha dominio $x \neq 0, -3$. Dato che $0 \in [-5/2, 2]$, la funzione non è derivabile in 0, dovremo perciò studiare il segno della derivata nei due intervalli $[-5/2, 0)$ e $(0, 2]$.

$$
\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+2)^2}} \geq 0 \qquad (9)
$$

dato che la radice è cubica il segno viene mantenuto anche se togliamo la radice, perciò la (9) equivale a:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{x(x+2)^2} &\geq 0 \ \textit{dato che } -3 \notin [-5/2, 0),\ (x+3)^2 > 0 \\
\frac{x+2}{x} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Le soluzioni si deducono dalla regola dei segni e sono $(x < -2) \vee (x > 0)$, dunque, dato che $-2 \in [-5/2, 0)$, $x = -2$ è un massimo relativo. Inoltre, pur non essendo derivabile in 0, notiamo che la funzione decresce prima di 0 e cresce dopo, perciò $x = 0$ è un minimo relativo. Per determinare i massimi e minimi assoluti valutiamo la funzione in -2 e 0:

$$f(-2) = \sqrt[3]{-8+12} = \sqrt[3]{4}; \quad f(0) = 0. \tag{10}$$

Siccome dobbiamo trovare i massimi e minimi assoluti e questi possono essere assunti anche agli estremi, calcoliamo:

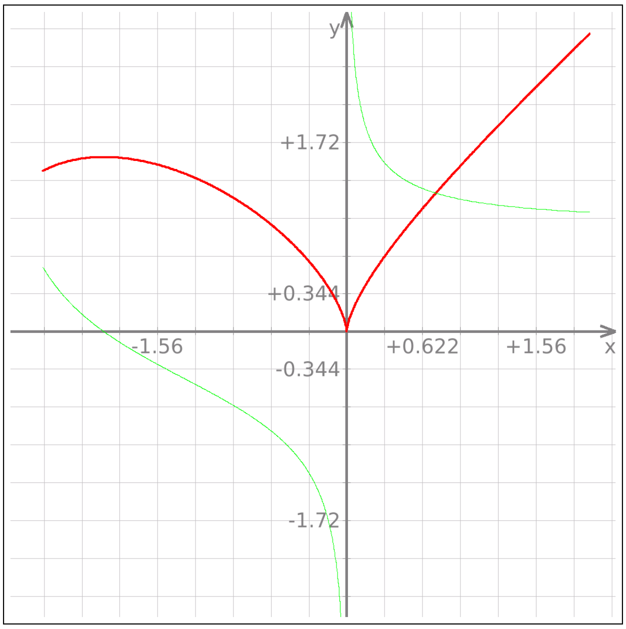
$$f(-5/2) = \sqrt[3]{25}/2 \quad f(2) = \sqrt[3]{20} \tag{11}$$

Mettendo in ordine i valori delle (10) e (11) otteniamo:

$$0 < \sqrt[3]{25}/2 < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{20}$$

Perciò $x = 0$ è il minimo assoluto e $x = 2$ è il massimo assoluto.

Riportiamo il grafico della funzione studiata (tratto rosso più spesso) e della sua derivata (tratto verde). Si noterà che in zero la funzione ha una cuspide a tangente verticale, la funzione è perciò non derivabile, infatti in quel punto la derivata ha un asintoto verticale.



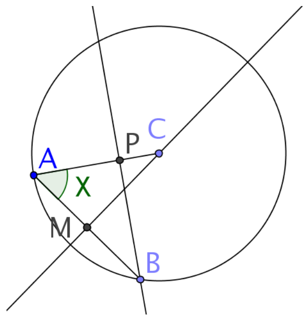
⁂

Esercizio 17 *Lasciamo allo studente volenteroso l'onore e l'onere di completare l'esercizio precedente.*

⁂

Esercizio 18 *A quali condizioni devono soddisfare i coefficienti a e b della funzione $f(x) = a\sin^2 x + b\sin x$ affinché essa abbia un massimo o un minimo in $x = \pi/4$.* $[a = 1]$

Esercizio 19 *Sia AB un segmento di lunghezza 1, disegnare una circonferenza con centro sull'asse di AB passante per i punti A e B. Indicata con P la proiezione ortogonale di AB sulla retta AC, esprimere la differenza $AC^2 - BP^2$ in funzione dell'angolo $B\widehat{A}C = x$ e determinare il valore minimo assunto da tale differenza.*



Soluzione

Dato che AMC e ABP sono triangoli rettangoli $AC = \frac{1/2}{\cos x}$ e $BP = 1 \cdot \sin x$. Perciò la funzione da studiare è:

$$f(x) = AC^2 - BP^2 = \frac{1}{4\cos^2 x} - \sin^2 x$$

Con la restrizione $0 < x < \pi/2$.

Studiamo il segno della derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{-2}{4\cos^3 x}(-\sin x) - 2\sin x \cos x &\geq 0 \\ \frac{2\sin x}{\cos^3 x}(1/4 - \cos^4 x) &\geq 0 \\ \left(\textit{dato che } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ è } \frac{\sin x}{\cos^3 x} > 0 \ \textit{quindi} \right) & \\ \cos^4 x &\leq 1/4 \end{aligned} \quad (12)$$

La soluzione della (12) è $(\pi/4, \pi/2)$, quindi $x = \pi/4$ è un minimo.

Esercizio 20 *In un giuoco d'azzardo che consiste in tre prove ripetute, si vince se il successo si verifica una e una sola volta. Supponendo che un giocatore possa truccare il giuoco, qual è la probabilità p da assegnare al successo che renda il giuoco a lui più conveniente?*

Soluzione

Se p è la probabilità con $0 < p < 1$ allora la probabilità di avere successo la prima volta e insuccesso le altre due è $p(1-p)(1-p)$, infatti p è la probabilità

di avere successo e $(1-p)$ quella opposta. Ora le situazioni favorevoli sono tre (successo la prima volta, o successo la seconda volta, o successo la terza), dunque la probabilità totale di vittoria è data dalla funzione:

$$f(p) = 3p(1-p)^2$$

Dobbiamo trovare il valore da assegnare a p affinché sia massima $f(p)$, in altre parole dobbiamo trovare il possibile massimo[2] di $f(p)$ nell'intervallo $(0,1)$. Studiamo il segno della derivata di $f(p)$:

$$\begin{aligned} f'(p) = 3(1-p)^2 + 3p \cdot 2(1-p)(-1) &\geq 0 \\ 3(1-p)(1-p-2p) &\geq 0 \\ 3(1-p)(1-3p) &\geq 0 \qquad (13) \end{aligned}$$

Siccome $0 < p < 1$ vale che $1-p > 0$ dunque la disuguaglianza (13) si riduce nella disequazione $1-3p \geq 0$ che ha soluzione $p \leq 1/3$. Quindi per $p = 1/3$ si ha un massimo è la probabilità di vittoria è $f(1/3) = 4/9$, siccome $f(0) = f(1) = 0$ è anche il massimo assoluto.

⋇

Esercizio 21 *Data la funzione* $f(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$*, trovare i punti di massimo e minimo e gli intervalli in cui è invertibile.*

Esercizio 22 *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

Soluzione

C.E.

$x \neq 0$, $x \neq \pm 1$, quindi il dominio è l'insieme $D = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Int. assi

È inoltre evidente che $f(x)$ non interseca mai l'asse delle ascisse e, visto il dominio, neanche quello delle ordinate.

Limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

Verificare questi limiti con molta attenzione!

Derivata

$$f'(x) = \frac{2x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}$$

Sgn. f'

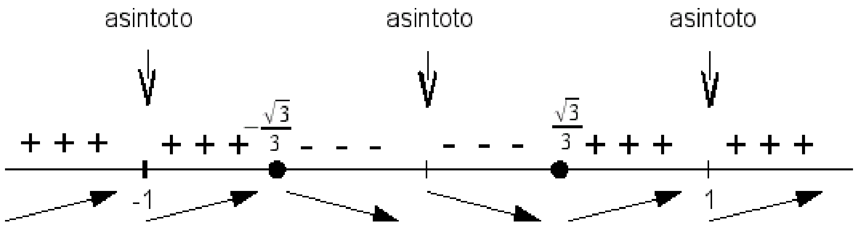
Dato che $x^2 > 0$ e $(1-x^2)^2 > 0$ $\forall x \in D$.

Max & min

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x < -\frac{\sqrt{3}}{3}) \vee (x > \frac{\sqrt{3}}{3})$.

[2] il massimo assoluto non è garantito che ci sia perché, pur essendo f continua il dominio cono è chiuso e limitato

Riassumiamo il segno della derivata nello schema seguente, evidenziando il dominio, i tratti di monotonìa della funzione e gli estremi.



Dai limiti si deduce che $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sono rispettivamente massimo e minimo relativi, massimi e minimi assoluti non sono presenti. Grafico

Mettendo insieme le informazioni ottenute si deduce che il grafico della funzione, si noterà che il grafico è simmetrico rispetto all'origine, questo fatto era deducibile dalla disparità della funzione.

Esercizio 23 *Studiare la funzione:*

$$f(x) = x \cos x - \sin x$$

Soluzione

Parità

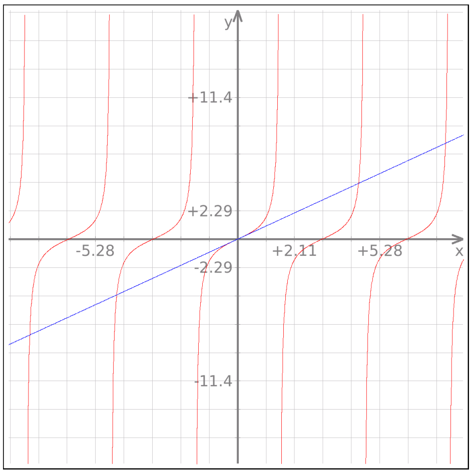
Dato che $f(-x) = -x\cos(-x) - \sin(-x) = -x\cos x + \sin x = -f(x)$ la funzione è perciò dispari.

C.E.

$D = \mathbb{R}$ e per la disparità basterà studiare la funzione in $[0, +\infty)$. Int. assi

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
x\cos x - \sin x &= 0 \\
\tan x &= x
\end{aligned}
$$

Questa equazione non è risolvibile per via elementare, però possiamo confrontare i grafici e renderci conto di come la retta $y = x$ interseca la curva $y = \tan x$, il grafico seguente dovrebbe chiarire.

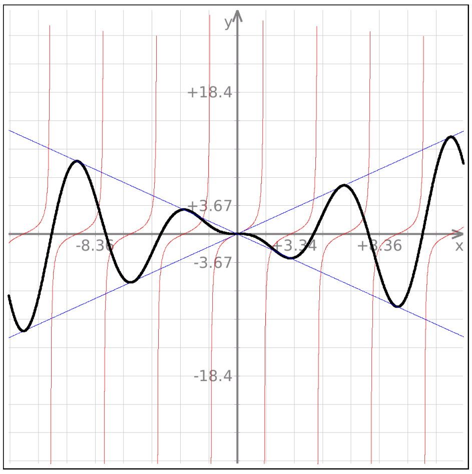


Evidentemente vi sono infinite soluzioni che si avvicinano via via a multipli dispari di $\pi/2$ restando più piccole nell'asse delle ascisse positive, essendo invece più grandi per valori negativi. Segn. f'

$$
\begin{aligned}
f'(x) = -x\sin x &\geq 0 \\
x\sin x &\leq 0 \\
\sin x &\leq 0 \quad \textit{dato che } x \geq 0
\end{aligned}
$$

Quindi cresce quando $\cos x$ è negativo, cioè per $(2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi$ quindi i minimi locali sono i multipli pari di π cioè $x = 2n\pi$. grafico

Le informazioni raccolte fino ad ora vengono utilizzate per costruire il grafico della funzione, abbiamo sovrapposto anche i grafici dello studio del segno per evidenziare la correlazione con la funzione.



Esercizio 24 *Studiare le seguenti funzioni:* ⋇

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}\ (PNI1994) \quad f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\ (PNI1994)$$
$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}\ (PNI2002) \quad f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}\ (1992)$$
$$f(x) = e^{-x}\cos x\ (1992); \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1\ (2005)$$

Esercizio 25 *(2004) In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:*

$$y = \frac{1 + a\sin x}{\cos x} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *Dimostrare che sono curve periodiche di periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si richiedono le coordinate;*

2. *tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$;*

3. *controllato che due curve soddisfano la condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$ dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.*

Soluzione del punto 1

Le curve sono periodiche di periodo 2π se $f(x + 2\pi) = f(x)\ \forall x$, infatti:

$$f(x + 2\pi) = \frac{1 + a\sin(x + 2\pi)}{\cos(x + 2\pi)} = (\sin, \cos,\ periodiche) = \frac{1 + a\sin x}{\cos x} = f(x)$$

Due curve distinte sono determinate da parametri a, b distinti, se hanno punti in comune devono soddisfare l'equazione:

$$\begin{aligned}
\frac{1+a\sin x}{\cos x} &= \frac{1+b\sin x}{\cos x} \\
a\sin x &= b\sin x \\
(a-b)\sin x &= 0\ (essendo\ a \neq b) \\
\sin x &= 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Per determinare le ordinate basta calcolare $y(k\pi) = 1/\cos(k\pi) = (-1)^k$, quindi i punti in comune hanno coordinate $(k\pi, (-1)^k$.

Soluzione del punto 2

Dato che la retta è orizzontale i punti di eventuale tangenza devono essere estremi, cioè annullano la derivata e devono avere ordinata $\sqrt{3}/2$:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{a+\sin x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \\
y &= \frac{1+a\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (14)
\end{aligned}$$

Siccoma $\sin x = -a$, sostituendo nella(14), otteniamo:

$$\frac{1+a(-a)}{\pm\sqrt{1-a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \pm\sqrt{1-a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La radice non può essere negativa quindi

$$1-a^2 = 3/4 \Rightarrow a = \pm 1/2$$

Soluzione del punto 3

$$y_1 = \frac{1+1/2\sin x}{\cos x};\ \ y_2 = \frac{1-1/2\sin x}{\cos x}$$

infatti $y_1(-x) = y_2(x)$, quindi sono simmetriche rispetto all'asse y.

Dominio: $\cos x \neq 0$ in $[-\pi, \pi]$ quindi $x \neq \pm\pi/2$. Quindi il dominio è: $[-\pi, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

Intersezione assi: $y(0) = 1$, $y(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \Rightarrow mai$

Segno: $y_1 \geq 0$ cioè $\frac{1-1/2\sin x}{\cos x}$, dato che $1 - 1/2\sin x > 0\ \forall x$ equivale a $\cos x > 0 \Rightarrow x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

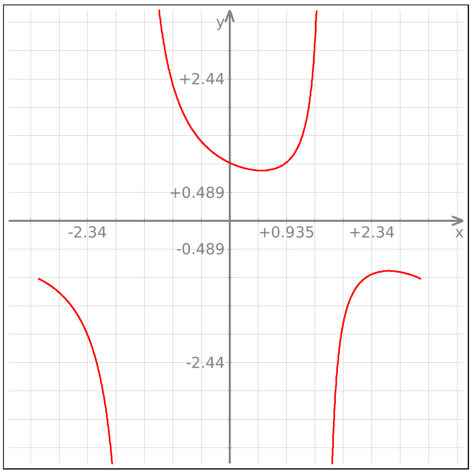
Limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y_2 = +\infty;\ \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} y_2 = -\infty;$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} y_2 = -\infty;\ \ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} y_2 = +\infty.$$

Massimi e minimi:

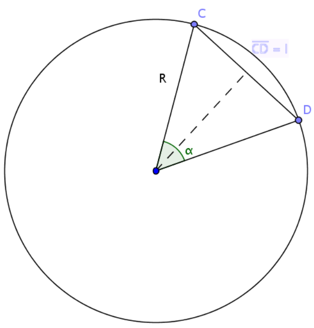
$$
\begin{aligned}
y_2' = \frac{-1/2 + \sin x}{\cos^2 x} &\geq 0 \\
\sin x &\geq 1/2 \Rightarrow -\pi/2 < x < \pi
\end{aligned}
$$

Perciò la funzione è crescente nel tratto in cui la derivata prima è positiva.



Il grafico di y_1 si ottiene applicando una simmetria assiale di asse y.

Esercizio 26 *Attraverso lo studio di una opportuna funzione dimostrare che il perimetro dei poligoni regolari inscritti in un cerchio cresce col crescere del numero dei lati.*



Soluzione

Se il poligono ha n lati allora $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, $l = 2R\sin(\alpha/2) = 2R\sin(\pi/n)$, il perimetro è $p(n) = nl = 2Rn\sin(\pi/n)$.

Ci interessa calcolare il limite:

$$
\lim_{n} 2Rn\sin(\pi/n) \stackrel{x=\pi/n}{=} \lim_{x \to 0^+} 2R\pi \frac{\sin x}{x} = 2R\pi
$$

Quindi la funzione perimetro $p(n)$ tende alla lunghezza della circonferenza.

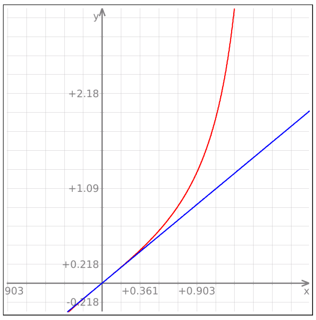
Verifichiamo ora che lo fa crescendo. Basterà studiare la crescenza della funzione reale $f(x) = 2Rx\sin(\pi/x)$ con $x > 0$ perché la funzione $p(n)$ è una sua restrizione ai numeri naturali.

$$\begin{aligned} f'(x) = 2R\sin(\pi/x) + 2Rx\cos(\pi/x)(-\pi/x^2) &\geq 0 \\ 2R(\sin(\pi/x) - \pi/x\cos(\pi/x)) &\geq 0 \qquad (15) \end{aligned}$$

Ora, $R > 0$ e siccome x tende a infinito si può supporre che $x > 3$ quindi $\pi/x < \pi/2$, perciò $\sin(\pi/x) > 0$ e $\cos(\pi/x) > 0$, quindi nella disequazione (15) si può dividere per $\cos(\pi/x)$ per ottenere:

$$\begin{aligned} \tan(\pi/x) &> \pi/x \ \textit{ con } x > 3; \ \textit{ posto } y = \pi/x \\ \tan y &> y \ \textit{ con } 0 < y < \pi/3 \qquad (16) \end{aligned}$$

Riportiamo il grafico di $y = \tan x$ e di $y = x$.



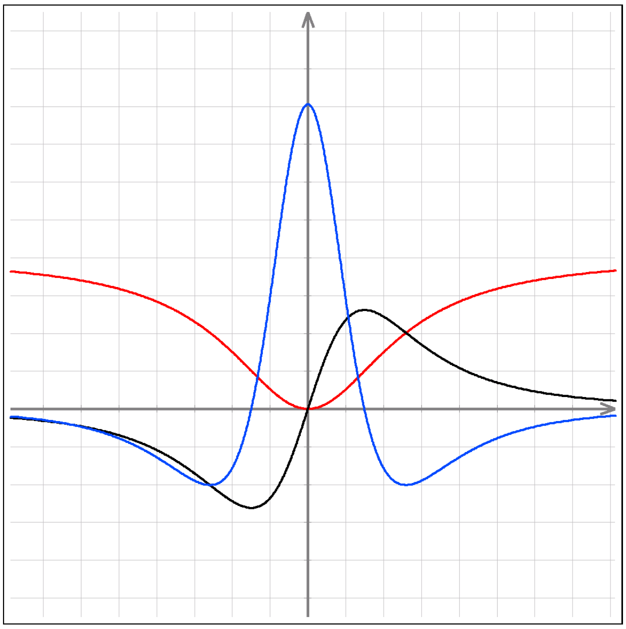
Evidentemente $\tan x > x$ per $0 < x < \pi/2$, quindi la (16) è certamente verificata e quindi la derivata è sempre positiva quindi la funzione $f(x)$ è crescente.

Esercizio 27 *Studiare le seguenti funzioni periodiche:* ⁕

$$\begin{aligned} &a)\ f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x};\quad b)\ f(x) = \frac{1}{2\sin^2 x - 1}; \\ &c)\ f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 1;\quad d)\ f(x) = \frac{\cos x - a}{\sin x + a}; \\ &e)\ f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x - \frac{5}{2};\quad f)\ f(x) = \sin x - \cos x. \end{aligned}$$

⁕

Esercizio 28 *Il disegno seguente riporta i grafici di una funzione e delle sue derivate (prima e seconda). Individua il grafico di ciascuna. Sapresti scrivere la legge di una funzione che si rispecchia nell'esercizio?*



※

Esercizio 29 *Calcola la derivata delle seguenti funzioni:*

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x; \quad y = 2\arcsin x - \arccos(1-2x^2); \quad x > 0.$$

Dal risultato quali conseguenze puoi trarre?

Esercizio 30 *Per quali valori di α la funzione*

$$f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$$

risulta crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Soluzione

Bisogna che la sua derivata prima sia positiva per oni x reale. Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \cdots \\ \cdots &= \frac{x^4(\alpha-1) + x^2(2\alpha-3) + \alpha}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Dato che $(1+x^2)^2 > 0$ basta che

$$x^4(\alpha-1) + x^2(2\alpha-3) + \alpha \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Ovvero che la funzione $g(x) = x^4(\alpha - 1) + x^2(2\alpha - 3) + \alpha$ abbia un minimo assoluto maggiore o uguale a zero.

Ponendo $t = x^2$ la funzione diventa una parabola e scrivendo l'ordinata del vertice positiva si ottiene[3] $\alpha > 9/8$.

Esercizio 31 *Applicando il teorema di Lagrange agli intervalli di estremi* 1 *e* x*, provare che* $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ *e dare del risultato una interpretazione grafica. (PNI 2002)*

Soluzione

Gli intervalli da analizzare sono di due tipi $[x, 1]$ e $[1, x]$, a seconda che $x > 1$ o $0 < x < 1$ ($x > 0$ perché è argomento del logaritmo).

Intervallo $[x, 1]$ **e** $f(x) = \ln x$

Posto $f(x) = \ln x$ le ipotesi del teorema sono verificate (controllare!), perciò esiste $c \in (x, 1)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
$$\frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} = \frac{1}{c} > 1 \quad \left(\textit{siccome } c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1\right)$$
$$\frac{-\ln x}{1 - x} > 1 \Rightarrow -\ln x > 1 - x \Rightarrow \ln x < x - 1$$

Intervallo $[1, x]$ **e** $f(x) = \ln x$

$f(x)$ come prima, $c \in [1, x]$:

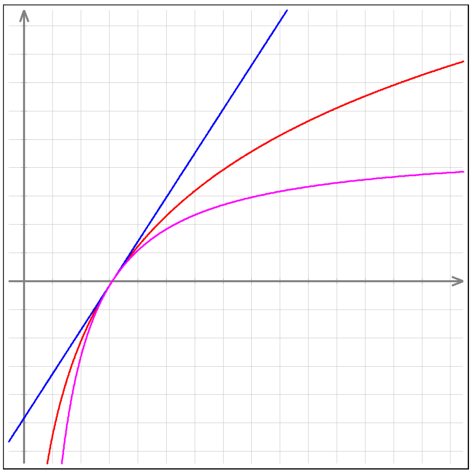
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c} < 1 \quad \left(\textit{siccome } c > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} < 1\right)$$
$$\frac{\ln x}{x - 1} < 1 \Rightarrow \ln x < x - 1$$

Concludendo $\ln x \leq x - 1$, $\forall x > 0$ l'uguaglianza vale solo se $x = 1$.

Per provare la disuguaglianza $1 - \frac{1}{x} < \ln x$, basta ricalcare quanto fatto con la funzione $g(x) = x \ln x$.

Il grafico seguente riporta chiaramente che la funzione di mezzo $\ln x$ è "compresa" fra la retta $y = x - 1$ e il ramo di iperbole $y = 1 - 1/x$.

[3] è vero sono stato sbrigativo, ma Monica mi sta chiamando perché è pronta la cena...



Esercizio 32 *Si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x + 1 & \textit{per } x \geq 0 \\ e^x & \textit{per } x < 0 \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$*? Se sì trova c.*

Soluzione

Le due componenti della funzione sono continue e derivabile $\forall x$, si tratta di vedere se lo è anche f in 0. Se verifichiamo la derivabilità in 0 abbiamo automaticamente la continuità (cfr $D \Rightarrow C$).

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & \text{per } x \geq 0 \\ e^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -3x^2 + 1 = 1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{aligned}$$

Sono uguali perciò la funzione è derivabile in tutti l'intervallo; troviamo c:

$$-3c^2 + 1 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}/3 e^c = 0 \;\; \textit{mai}$$

ma solo $c = \sqrt{3}/3 > 0$ quindi è l'unico valido.

⁂

Esercizio 33 *Determinare a, b, c affinché valga il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 4]$ per la funzione:*

$$f'(x) = \begin{cases} -ax^2 + 3x + c & \textit{per } x \leq 2 \\ \frac{b}{x^2} & \textit{per } x > 2 \end{cases}$$

[sol. $a = 15/8, b = 18, c = 6$]

※

Esercizio 34 *Verificare che la funzione è continua e derivabile in $x = 0$:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & per\ x \leq 0 \\ (2x+1)e^x & per\ x > 0 \end{cases}$$

※

Esercizio 35 *Idem per:*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x^2 + x + 1) & per\ x \leq 0 \\ -3x^2 - 3x & per\ x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 36 *Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio allora fra due radici distinte reali di $p(x)$ c'è sempre una radice di $p'(x)$.*

Soluzione

Siano x_1 e x_2 tali radici (supponiamo senza perdere di generalità che $x_1 < x_2$, altrimenti basterebbe invertire i nomi), allora per il teorema di Rolle applicato[4] all'intervallo $[x_1, x_2]$ esiste c con $x_1 < c < x_2$ tale che $p'(c) = 0$, ciò prova l'asserto.

Esercizio 37 *Dimostrare che $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ con $a, b \in \mathbb{R}$.*

Soluzione

Se $a = b$ la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo perciò $b > a$, allora applicando Lagrange alla funzione $\sin x$ nell'intervallo $[a, b]$ si ottiene che:

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c \ \ con\ c \in [a, b], \tag{17}$$

ma $-1 < \cos x < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi, essendo $b > a$, la (17) implica:

$$-(b - a) \leq (\sin b - \sin a) \leq (b - a) \Rightarrow \sin b - \sin a \leq |b - a|. \tag{18}$$

Se invece $b < a$, con la stessa argomentazione, si giunge a:

$$-(a - b) \leq (\sin a - \sin b) \leq (a - b) \Rightarrow \sin a - \sin b \leq |b - a|. \tag{19}$$

Le due disuguaglianze (18) e (19) provano la consegna.

※

Esercizio 38 *Si vuole che $x^3 - bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b? (PNI 2003)*

[sol. $b < --3\sqrt[3]{\frac{49}{4}} \approx -6,91$]

※

Esercizio 39 *Dimostrare senza risolverla che l'equazione $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 6 = 0$ ammette una soluzione reale.*

※

Esercizio 40 *Verificare che* $f(x) = e^{-x} + x^{-1}$ *è invertibile per* $x > 0$ *e, detta* g *la sua inversa, calcolare* $g'(1 + e^{-1})$. *(2002)*

※

Esercizio 41 *Verificare che* $f(x) = 3x + \ln x$, *definita per* $x > 0$, *è strettamente crescente. Detta* g *la sua inversa, calcolare* $g'(3)$. *(PNI 2002)*

※

Esercizio 42 *In quante parti uguali si deve dividere un numero reale positivo a in modo che il loro prodotto sia massimo?*

[4] ovviamente valgono le ipotesi, provatelo!